

Correction Devoir maison n°3

Exercice 1

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = -1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - 2a_n}$$

1. — On cherche à démontrer la propriété $\mathcal{P}_n : \{a_n < 0\}$ pour tout n entier.
 - **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_0 s'écrit $a_0 < 0$. Or d'après l'énoncé, $a_0 = -1 < 0$. La propriété \mathcal{P}_0 est donc vraie.
 - **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $a_n < 0$)

Or, $a_n < 0 \Rightarrow -2a_n > 0 \Rightarrow 3 - 2a_n > 0$. Ainsi, dans l'expression de $a_{n+1} = \frac{a_n}{3 - 2a_n}$, le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Le quotient est donc négatif. Ainsi, on a $a_{n+1} < 0$, c'est-à-dire \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

On en déduit que la suite des proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < 0$.

2. Programme Scilab permettant de trouver le minimum et le maximum de la suite :

```

u = -1 // initialisation de la suite
min = u // Variable dans laquelle on enregistre le minimum
max = u // Variable dans laquelle on enregistre le maximum
for i = 1:100
    u = u/(3-2*u)
    if min > u then
        min = u
    end
    if max < u then
        max = u
    end
end
disp("Le minimum de la suite est " + string(min) + ".")
disp("Le maximum de la suite est " + string(max) + ".")

```

3. D'après la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 0$ donc $a_n \neq 0$. Ainsi le dénominateur ne s'annule pas et on a bien $t_n = \frac{1}{a_n}$.
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{a_n}{3 - 2a_n}} \\
 &= \frac{3 - 2a_n}{a_n} \\
 &= \frac{3}{a_n} - \frac{2a_n}{a_n}
 \end{aligned}$$

Et finalement,

$$t_{n+1} = 3t_n - 2.$$

5. L'expression de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trouvée à la question 4 est celle d'une suite arithmético-géométrique.
- On résout l'équation $x = 3x - 2 \iff x = 1$. (Le nombre α du cours correspond donc à 1).
 - On pose la suite $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = t_n - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= t_{n+1} - 1 = 3t_n - 3 \\ \iff v_{n+1} &= 3(t_n - 1) \\ \iff v_{n+1} &= 3v_n. \end{aligned}$$

- La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 et $v_0 = t_0 - 1 = \frac{1}{a_0} - 1 = -2$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -2 \times 3^n.$$

- Finalement, comme $t_n = v_n + 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n = -2 \times 3^n + 1.$$

6. Comme $t_n = \frac{1}{a_n} \iff a_n = \frac{1}{t_n}$, d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{-2 \times 3^n + 1}.$$

Exercice 2 - Ecricome ECE 2015 - Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 - e^{-u_n}.$$

1. On remarque que $e^x \geq x + 1 \iff e^x - (x + 1) \geq 0$. On pose alors la fonction $f : x \rightarrow e^x - (x + 1)$ définie sur \mathbb{R} et on va montrer que f est positive ou nulle pour tout x réel. Afin d'étudier les variations et le signe de f , on dérive la fonction. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1.$$

Or,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, e^x - 1 \geq 0 &\iff e^x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \quad (\text{car la fonction } \ln \text{ est croissante}) \end{aligned}$$

Sachant que $f(0) = 0$, on en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	-		+
Variation de f			
Signe de $f(t)$	+	0	+

On a alors : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \iff e^x \geq x + 1 \text{ et } e^x = x + 1 \text{ si et seulement si } x = 0.}$

2. On remarque que $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = f(u_{n-1}) > 0 \quad (\text{d'après la question précédente}).$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.}$

3. On complète le programme suivant pour afficher les 100 premiers termes de la suite

```
u = 1
for n = 1:99
    u = 1 - exp(-u)
    disp(u)
end
```

4. $\boxed{\text{On conjecture que la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

5. On va montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

— On cherche à montrer les propriétés $\mathcal{P}_n : \{u_{n+1} \leq u_n\}$. item **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_1 s'écrit $u_2 \leq u_1$. Afin de montrer cette inéquation, on calcule $u_2 = 1 - e^{-u_1} = 1 - \frac{1}{e} < 1$. On a bien

$$u_2 \leq u_1$$

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_{n+1} \leq u_n$)

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq u_n &\Rightarrow -u_{n+1} \geq -u_n && (\text{multiplication par } -1) \\ &\Rightarrow e^{-u_{n+1}} \geq e^{-u_n} && (\text{La fonction exponentielle est croissante}) \\ &\Rightarrow -e^{-u_{n+1}} \leq -e^{-u_n} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-u_{n+1}} \leq 1 - e^{-u_n} \\ &\Rightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1} : \{u_{n+2} \leq u_{n+1}\}$ est vraie et ainsi la suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

$\boxed{\text{En d'autres termes, la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

☞ **Remarque** : Il y a une autre méthode, plus rapide, qui n'utilise pas la récurrence. En effet, d'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (en remplaçant x par $-u_n$).

$$\begin{aligned} e^{-u_n} \geq -u_n + 1 &\Rightarrow -e^{-u_n} \leq u_n - 1 && (\text{multiplication par } -1) \\ &\Rightarrow 1 - e^{-u_n} \leq u_n \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

6. D'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. On a alors (en remplaçant x par u_n cette fois

ci) :

$$\begin{aligned}
 e^{u_n} \geq u_n + 1 &\Rightarrow e^{-u_n} \leq \frac{1}{1 + u_n} && \text{(Fonction inverse décroissante sur } \mathbb{R}^+ \text{)} \\
 &\Rightarrow -e^{-u_n} \geq -\frac{1}{1 + u_n} && \text{(Multiplication par } -1 \text{)} \\
 &\Rightarrow 1 - e^{-u_n} \geq 1 - \frac{1}{1 + u_n} \\
 &\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1 + u_n - 1}{1 + u_n} \\
 &\Rightarrow u_{n+1} \geq \frac{u_n}{1 + u_n}
 \end{aligned}$$

7. — On cherche à démontrer les propriétés $\mathcal{P}_n : \left\{ u_n \geq \frac{1}{n} \right\}$ pour tout $n \geq 1$.

— **Initialisation** : La propriété \mathcal{P}_1 s'écrit $u_1 \geq 1$. Or d'après l'énoncé, $u_1 = 1 \geq 1$. La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

— **Hérédité** : On suppose que \mathcal{P}_n est vrai pour un certain rang n . (On a donc $u_n \geq \frac{1}{n}$)

Or, d'un côté $u_n \geq \frac{1}{n}$ et d'un autre côté, $1 + u_n \geq 1 \iff \frac{1}{1 + u_n} \leq 1$. On a alors

$$\frac{u_n}{1 + u_n} \geq \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + u_n} \implies u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

(La dernière inégalité est obtenue en se souvenant que $a \times b \geq a$ si $b \in [0; 1]$) Enfin, comme $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1}$, on a

$$u_{n+1} \geq \frac{1}{n} \implies u_{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

On en déduit que la suite de proposition (\mathcal{P}_n) est héréditaire.

— **Conclusion** : $\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{n}.$

Exercice 3 : Probabilités - ESC 1992

1. (a) L'évènement A_0 est "La guêpe se trouve dans la pièce A à l'instant 0". Vu l'énoncé, cet évènement est certain donc

$$\boxed{a_0 = P(A_0) = 1.}$$

Pour la même raison, l'évènement B_0 : "La guêpe se trouve dans la pièce B à l'instant 0", l'évènement S_0 : "La guêpe est sorti à l'instant 0" et l'évènement S_1 : "La guêpe est sorti à l'instant 1" sont des évènements impossible

$$\boxed{b_0 = P(B_0) = 0, s_0 = P(S_0) = 0 \text{ et } s_1 = P(S_1) = 0.}$$

(b) On calcule la probabilité des évènements A_1 : "La guêpe est en A à l'instant 1" et B_1 : "La guêpe est en B à l'instant 1". Comme l'on sait que la guêpe était en A à l'instant 0, on a

$$\boxed{a_1 = P(A_1) = \frac{1}{3} \text{ et } b_1 = P(B_1) = \frac{2}{3}}$$

L'évènement S_2 : "La guêpe sort à l'instant 2" n'arrive que si la guêpe était en A à l'instant 0, en B à l'instant 1 et en D à l'instant 2. Ainsi $S_2 = A_0 \cap B_1 \cap D_2$. D'après la formule des probabilités composées

$$s_2 = P(S_2) = P(A_0 \cap B_1 \cap D_2) = P(A_0) \cdot P_{A_0}(B_1) \cdot P_{A_0 \cap B_1}(D_2) = 1 \cdot 2/3 \cdot 1/4 = 1/6$$

(c) On cherche à calculer la probabilité de B_1 sachant A_2 . A l'aide de la formule de Bayes

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(B_1) P_{B_1}(A_2)}{P(A_2)}$$

Comme (A_1, B_1) est un système complet d'évènements, on applique la formule des probabilités totales :

$$P(A_2) = P(B_1) P_{B_1}(A_2) + P(A_1) P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$$

Ainsi

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}$$

(d) Pour être en A à l'instant $n+1$ elle pouvait être en A ou en B à l'instant précédent. donc $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1})$ et de la même façon $B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$. Comme les évènements $(A_n \cap A_{n+1})$ et $(B_n \cap A_{n+1})$ sont incompatibles,

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ \iff P(A_{n+1}) &= P(A_n) P_{A_n}(A_{n+1}) + p(B_n) p_{B_n}(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Or la probabilité que la guêpe soit en A à l'instant $n+1$ sachant que la guêpe est en A à l'instant n est $1/3$ (donné dans l'énoncé). De même la probabilité que la guêpe soit en A à l'instant $n+1$ sachant que la guêpe est en B à l'instant n est $2/3$. Ainsi $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$$

et de la même façon

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

(e) Voici un script scilab permettant de calculer les $n^{\text{ème}}$ termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

```
n = input("Entrez un nombre entier : ")
a = 1 // initialisation de la suite a_n
b = 0 // initialisation de la suite b_n
for i = 1:n
    c = a // enregistrement de la suite a
    a = (1/3) * a + (1/4) * b
    b = (2/3) * c + (1/2) * b
end

disp("Le n-ème terme de la suite a est " + string(a) + ".")
disp("Le n-ème terme de la suite b est " + string(b) + ".")
```

(f) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n = 2 \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \right) = 2a_{n+1}.$$

Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 2a_n$. (en substituant n à $n+1$)

(g) On a alors : pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}2a_n = \frac{5}{6}a_n$$

donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $5/6$ et de premier terme $a_1 = 1/3$ donc

$$a_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{2}{5} \text{ pour } n \geq 1$$

En conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geq 1, a_n = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n \text{ et } b_n = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

2. (a) La guêpe "sort" si l'instant d'avant elle était en B et que l'instant d'après elle est dehors. Donc à partir de l'instant $n = 2$,

$$s_n = P(S_n) = P(B_{n-1} \cap D_n) = P(B_{n-1}) \times P_{B_{n-1}}(D_n) = \frac{1}{4}b_{n-1}$$

Ainsi

$$\boxed{s_n = \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

(b) La guêpe est dehors à l'instant 10 si elle sort entre l'instant 2 et 10. On peut alors écrire

$$D_{10} = \bigcup_{k=2}^{10} S_k$$

Les événements S_k sont deux à deux incompatibles, ainsi Donc

$$\begin{aligned} P(D_{10}) &= P(S_2) + P(S_3) + \dots + P(S_{10}) \\ &= 6 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 6 \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots + 6 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \\ &= 6 \left(\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots + \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \right) \\ &= 6(u_2 + u_3 + \dots + u_{10}) \end{aligned}$$

ou la suite u est une suite géométrique de raison $5/6$. Ainsi

$$\boxed{P(D_{10}) = 5 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{5^3}{6} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8\right)}$$